

19/4/21

Θεωρήματα ορισμένων πινάκων

$A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $A = A^t \Rightarrow$ Διαγωνοποιείται, οι ιδιοτιμές πραγματικές
και $\exists P$: ορθογώνιος και Λ : Διαγώνιος ώστε $A = P \Lambda P^t$

Ερμιτιανοί $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$, $A = \bar{A}^t \Rightarrow$ Διαγωνοποιούνται, οι
ιδιοτιμές πραγματικές και $\exists P$, $P^{-1} = \bar{P}^t$ με $A = P \Lambda \bar{P}^t$

Π.χ. Εξετάστε αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{iy} \\ \sin \theta e^{-iy} & \cos \theta \end{pmatrix}$ είναι
ερμιτιανός

Π.ω.

Πρέπει $A = \bar{A}^t$ $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta (\cos y + i \sin y) \\ \sin \theta [\cos(-y) + i \sin(-y)] & \cos \theta \end{pmatrix} =$

$e^{iy} = \cos y + i \sin y$
 $= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \cos y + i \sin \theta \sin y \\ \sin \theta \cos y - i \sin \theta \sin y & \cos \theta \end{pmatrix}$

$\bar{A}^t = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \cos y + i \sin \theta \sin y \\ \sin \theta \cos y - i \sin \theta \sin y & \cos \theta \end{pmatrix}$ και δείχνουμε ότι $A = \bar{A}^t$
ισχύει: A ερμιτιανός

Ορισμός: Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας A καλείται
μ-αρνητικός (θετικό) ορισμένος, αν ισχύει $u A u^t \geq 0$
($u A u^t > 0$) $\forall u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ εδώ το u είναι διάνυσμα
γραμμικό

$u A u^t = \langle u A, u \rangle$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο
 $A u^t = (u A^t)^t = (A^t)^t u^t = A u^t$. Άρα $u A u^t = u (u A^t)^t = \langle u, u A^t \rangle$
 $= \langle u, u A \rangle$. Άρα έχουμε $\langle u A, u \rangle = \langle u, u A \rangle \geq 0 \forall u \neq 0$

Σημείωση: Αν ο A είναι ερμιτιανός ($A = \bar{A}^t$) πάλι ορίζεται ο
μ-αρνητικός ή θετικό ορισμένος: $u A u^t \geq 0$ (διότι έχουμε
μικρότερο εσωτερικό γινόμενο, $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ και το
κανονικό εσωτερικό γινόμενο δίνεται από: $\langle u, v \rangle = u v^t$

Ορισμός: Έστω $T: V \rightarrow V$ ενδομορφισμός στον Ευκλείδειο χώρο
 V . Ο T καλείται συμμετρικός αν ισχύει $\langle T u, w \rangle = \langle u, T w \rangle$
 $\forall u, w \in V$. Ένας συμμετρικός ενδομορφισμός καλείται μ-αρνητικός
(θετικό) ορισμένος, αν ισχύει $\langle T u, u \rangle \geq 0$ (> 0) $\forall u \in V - \{0\}$

Πρόταση: Ο πίνακας συμμετρικός ενδομορφισμού ως προς ορθοκανονική βάση είναι συμμετρικός

Αποδ:

$T: V^n \rightarrow V^n$ συμμετρικός και $S = (v_1, \dots, v_n)$ ορθοκανονική βάση. Αν $A = T_S^S$, τότε $A = A^t$

$Tv_i = \sum_{t=1}^n a_{ti} v_t$ αυτοί οι αρίθμοι θα δώσουν την i -στήλη του A

$Tv_j = \sum_{s=1}^n a_{sj} v_s$ $A = (a_{ij}) = T_S^S$, δέχουμε $a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow A = A^t$

$\langle Tv_i, v_j \rangle = \langle v_i, Tv_j \rangle \Rightarrow \langle \sum_{t=1}^n a_{ti} v_t, v_j \rangle = \langle v_i, \sum_{s=1}^n a_{sj} v_s \rangle \Rightarrow$
ορθοκανονική

$\Rightarrow a_{ji} = a_{ij}$

Θεώρημα: Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας A είναι μη-αρνητικό (θετικό) ορισμένος αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη-αρνητικές (θετικές)

Αποδ:

$(\Rightarrow)$ Υποθέτουμε ότι $u A u^t \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ u : γραμμή
Έστω λ : ιδιοτιμή και u : ιδιοδιάνυσμα του A : $A u^t = \lambda u^t \Rightarrow$
 $\Rightarrow u A u^t = u \lambda u^t \Rightarrow u A u^t = \lambda \|u\|^2$ και A μη-αρνητικό
ορισμένος. Άρα $\lambda \|u\|^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$
 $\neq 0$

Αν ήταν θετικό ορισμένος θα είχαμε $\lambda > 0$

$(\Leftarrow)$ Ο A είναι πραγματικός συμμετρικός με μη-αρνητικές ιδιοτιμές. Θέλουμε $u A u^t \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

$A = A^t \Rightarrow$ διαγωνοποιείται, ιδιοτιμές πραγματικές και $\exists$ η ορθοκανονική ιδιοδιάνυσμα. Δηλ. έχουμε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ από ιδιοδιανύσματα. $A u_i^t = \lambda_i u_i^t$ $S = (u_1, \dots, u_n)$ ιδιοδ. ορθ. κανον. βάση

Έχουμε ότι $x > 0, x > 1, x > -2 \Rightarrow \boxed{x > 1} \Rightarrow A$ θετικά
ορισμένος

Π.χ.: Να υπολογιστεί το $\det A$ ώστε ο πίνακας A να είναι
θετικά ορισμένος. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & a & 8 \\ 4 & 8 & a \end{pmatrix}$

Με το κριτήριο Sylvester: $2 > 0$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow 2a - 4 > 0 \Rightarrow \underline{a > 2}$$

$$\det A > 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & a & 8 \\ 4 & 8 & a \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-2 & 4 \\ 0 & 4 & a-8 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} a-2 & 4 \\ 4 & a-8 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow (a-2)(a-8) - 16 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 10a + 16 - 16 > 0 \Rightarrow a(a-10) > 0. \text{ Επειδή } a > 2$$

πρόκειται $\boxed{a > 10}$

Για $a > 10 \Rightarrow A$ θετικά ορισμένος

Π.χ.: Αν ο A είναι 3×3 γραμμικός συμμετρικός με $A^3 = I$
 $\Rightarrow A = I \Rightarrow$ Διαγωνοποιείται

Υπάρχει P : ορθογώνιος και $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ με $A = P \Lambda P^T \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^3 = (P \Lambda P^T)^3 = P \Lambda^3 P^T$$

$$A^3 = I \Rightarrow P \Lambda^3 P^T = I \Rightarrow P^{-1} P \Lambda^3 P^T P = P^{-1} \cdot I \cdot P \Rightarrow \Lambda^3 = I$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & & \\ & \lambda_2^3 & \\ & & \lambda_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_i^3 = 1 \Rightarrow \lambda_i = 1$$

$\lambda^3 = 1$. Ζητάμε τις ρίζες του πολυωνύμου $x^3 - 1 = 0$
 $x_1 = 1$ και $x_2 = x_3$, $x_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

Οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές. Άρα $\lambda_i = 1 : x^2 + x + 1 = 0$
 $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$\Rightarrow$ έχει μιγαδικές ρίζες $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^t = I$

Πρόβλημα: Αν οι πίνακες A και B είναι θετικά ορισμένοι τότε να δείξετε ότι ισχύει το εξής: $AB = BA \Leftrightarrow AB$ θετικά ορισμένος

Απόδ: ($\Leftarrow$)

$A > 0 \Leftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του $> 0 \Leftrightarrow A v_i = \lambda_i v_i, \lambda_i > 0$

$B > 0 \Leftrightarrow -|| - || - > 0 \Leftrightarrow B v_i = \mu_i v_i, \mu_i > 0$

Αν AB θετικά ορισμένος, τότε θα πρέπει να είναι συμμετρικός: $AB = (AB)^t \Rightarrow AB = B^t A^t \Rightarrow AB = BA$

($\Rightarrow$) Γνωρίζουμε ότι $AB = BA$ θέλουμε ο AB να έχει θετικές ιδιοτιμές

$AB = BA = B^t A^t = (AB)^t \Rightarrow AB$ συμμετρικός

Αν u είναι ιδιοδιάνυσμα του AB : $ABu = \lambda u \Rightarrow BAu = \lambda u$. Δηλ το u είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του BA

①

$B v_i = \mu_i v_i \Rightarrow AB v_i = A(\mu_i v_i) \Rightarrow AB v_i = \mu_i A v_i \Rightarrow BA v_i = \mu_i A v_i \Rightarrow$

$\Rightarrow$ το $A v_i$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B για την ιδιοτιμή μ_i ②

$\Rightarrow A v_i = \kappa_i v_i \Rightarrow$ Το v_i είναι ιδιοδιάνυσμα και του A Άρα:

$\kappa_i = \lambda_i$ (*). Δηλ έχουμε:

$AB v_i = \lambda_i \mu_i v_i$ Οι ιδιοτιμές του AB είναι το $\lambda_i \mu_i$ Άλλε

$\lambda_i \mu_i > 0$. Άρα οι ιδιοτιμές του AB είναι και αυτές θετικές $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB$ θετικά ορισμένος

Δηλ. έχουμε $AB v_i = A(\mu_i v_i) = \mu_i A v_i = \mu_i \lambda_i v_i$ (*)